

Seguimos estudiando las funciones. Hemos visto qué es una función, el dominio y recorrido, puntos de corte con los ejes y cuándo una función es continua.

Ahora estudiaremos su monotonía, o lo que es lo mismo, si crece o decrece. Y veremos cuáles son los máximos y mínimos (si existen). Punto 4 del tema, página 220.

4. Monotonía. Máximos y mínimos.

Leer la página entera y copiar las definiciones de los cuadros grises.

Copiar el cuadrito del presta atención, es importante.

Vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=cWqJfem3GTk>

<https://www.youtube.com/watch?v=5HUI3glt63g>

Página 221 ejercicios 22, 23 y 24.

Página 227 ejercicio 41

Página 228 ejercicios 43, 44, 45

5. Simetrías y periodicidad

Simetría

Fíjate bien en las gráficas, si doblamos la primera gráfica por el eje y, ¿coinciden ambos lados de la gráfica? ...Sí, pues entonces decimos que esa **función es par**, es decir, la gráfica es simétrica respecto de una recta (el eje OY).

Si doblamos la segunda gráfica por el eje x y luego por el eje y, ¿coinciden ambos lados? ...Sí, pues entonces decimos que es una función **impar**, es decir, la gráfica es simétrica respecto de un punto (el punto O, origen de coordenadas).

(Esos dos tipos de simetría (simetría respecto un punto y respecto una recta lo habréis visto en plástica en cursos inferiores)

Para comprobar si una función es par o impar, haciendo cálculos, se hace como se dice en los cuadros grises. Hay que hacer esa comprobación.

Copiar los cuadros grises. Copiar el ejercicio resuelto de la página 223

Ejercicios 26 y 28 de la página 223

Página 228 ejercicio 48

Periodicidad

(Algo periódico es algo que se repite en el tiempo, por ejemplo el periódico de papel que compramos para estar informados, sale cada día)

Una **función es periódica** si “se repite en todo su dominio”, es decir, si cogemos un trozo y al repetirlo obtenemos la función completa. La longitud del trozo más pequeño que cumple esa condición es el **periodo** (T).

Leer el ejemplo del libro y copiar la definición, el cuadro gris.

Página 223 Ejercicios 29 y 30.

Vídeo donde se explica la simetría y periodicidad:

<https://www.youtube.com/watch?v=Ltuy5G1kfg>

Ejercicios para comprobar si una función es par, impar o no presenta ninguna de esas simetrías:

<https://www.youtube.com/watch?v=jKiuVZpErXU>

6. interpretación de gráficas

Leer el ejemplo.

Copiar los pasos que hay que seguir para el estudio de una función (Cuadro gris). Podéis ponerle números para tener claro que no se os olvida ningún paso cuando estéis haciendo un ejercicio.

Copiar el cuadro de presta atención. Es importante que lo recordéis.

Copiar el ejercicio resuelto de la página 224

Página 225 ejercicios 32 y 33

Página 229 ejercicios 53, 54,56 y 58

Entregar los ejercicios como máximo el **2 de junio**.

Os dejo soluciones para corregir y si os puede ayudar a entender y en clase me vais preguntando las dudas.

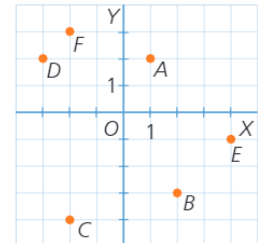
Soluciones de los ejercicios del pdf anterior:

Repasa lo que sabes

Soluciones de las actividades

1. Dibuja en tu cuaderno el plano cartesiano y representa en él los siguientes puntos.

- a) $A(1, 2)$, $B(2, -3)$, $C(-2, -4)$ y $D(-3, 2)$
- b) Un punto, E , de abscisa 4 y ordenada -1 .
- c) Un punto, F , de abscisa -2 y ordenada 3.

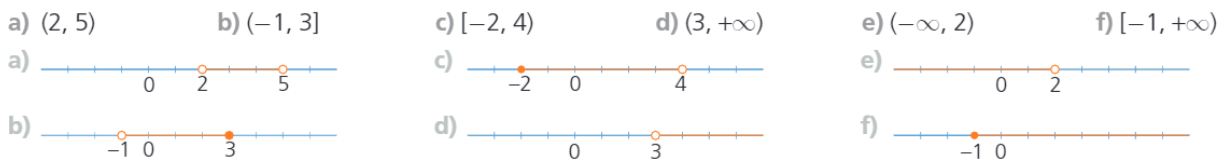


2. ¿Qué condición deben cumplir las coordenadas de un punto que pertenece al eje de abscisas? ¿Y si pertenece al eje de ordenadas?

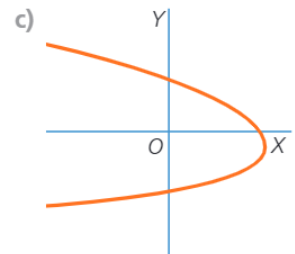
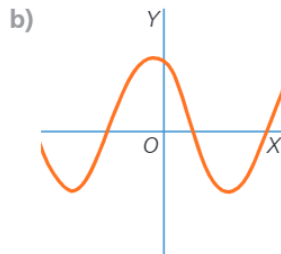
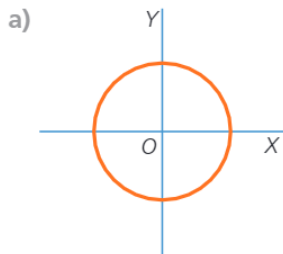
Para que un punto pertenezca al eje de abscisas su segunda coordenada, la ordenada, debe ser 0.

Un punto que pertenezca al eje de ordenadas tiene por abscisa 0.

3. Representa en la recta real los siguientes intervalos.



1 Indica si las siguientes gráficas representan o no una función. Razona la respuesta.



a) y c) No es función, un mismo valor x tiene dos imágenes.

b) Es función, a cada valor de x le corresponde un único valor de y .

- 2 Sabemos que un kilo de naranjas cuesta 1,20 €.
- Construye una tabla de valores e indica cuáles son la variable independiente y la variable dependiente.
 - ¿Tiene sentido dar valores negativos a x ?
 - ¿Tiene sentido dar valores a x que no sean números enteros?

a)

| | | | | |
|---------------|------|------|------|------|
| Cantidad (kg) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Precio (€) | 1,20 | 2,40 | 3,60 | 4,80 |

La variable independiente es *la cantidad* y la variable dependiente es *el precio*.

- No tiene sentido.
 - Si tiene sentido porque podemos comprar fracciones de kilo de naranjas.
- 3 Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones y, si lo son, señala las variables independiente y dependiente.
- A cada kilo de peras se le asigna su precio.
 - A cada fracción se le asignan sus equivalentes.
 - A cada persona se le asigna su edad.
 - A cada número se le asigna su mitad.
- Es función: la variable independiente es *la cantidad* y la dependiente *el precio*.
 - No es función.
 - Es función: la variable independiente es *la persona* y la dependiente es *la edad*.
 - Es función: la variable independiente es *los números* y la dependiente es la mitad de *los números*.

- 4 Teniendo en cuenta que el telesilla de una pista de esquí circula a 4 m/s, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla.

| | | | | | | | |
|---------------|---|----|----|-----|-----|------|-----|
| Tiempo (s) | 5 | 15 | 50 | x | x | x | 600 |
| Distancia (m) | x | x | x | 500 | 800 | 2000 | x |

| | | | | | | | |
|---------------|----|----|-----|-----|-----|------|------|
| Tiempo (s) | 5 | 15 | 50 | 125 | 200 | 500 | 600 |
| Distancia (m) | 20 | 60 | 200 | 500 | 800 | 2000 | 2400 |

- 5 Halla:

- La imagen de $x = 5$ mediante la función $f(x) = 2x - 1$.
- La imagen de $x = -2$ mediante la función $f(x) = -2x - 1$.

a) $f(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

b) $f(-2) = -2 \cdot (-2) - 1 = 3$

- 6 Escribe la expresión algebraica que corresponda a:

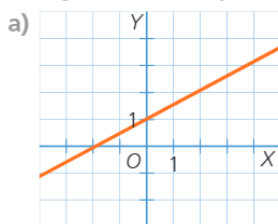
- La función que asocia a cada número su triple más 1.
- La función que asocia a cada número su mitad.
- La función que asocia a cada número su opuesto.

a) $f(x) = 3x + 1$

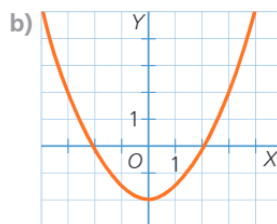
b) $f(x) = \frac{x}{2}$

c) $f(x) = -x$

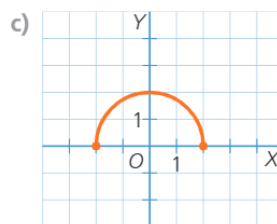
- 10 Averigua el dominio y el recorrido de estas funciones.



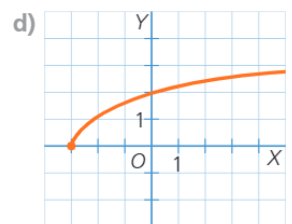
a) Dom $f = \mathbb{R}$
Recorrido = \mathbb{R}



b) Dom $f = \mathbb{R}$
Recorrido = $[-2, +\infty)$

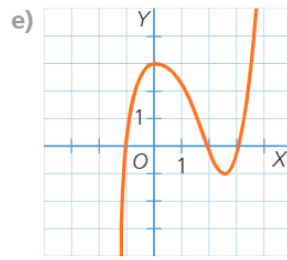
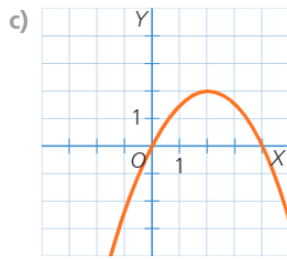
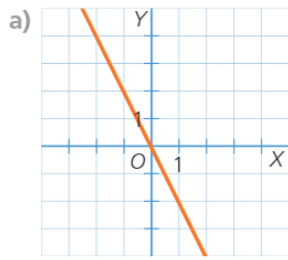


c) Dom $f = [-2, 2]$
Recorrido = $[0, 2]$



d) Dom $f = [-3, +\infty)$
Recorrido = $[0, +\infty)$

11 Estudia el dominio, el recorrido y los puntos de corte con los ejes de estas funciones.



a) Dom $f = \mathbb{R}$ Recorrido $= \mathbb{R}$
Corte: (0, 0)

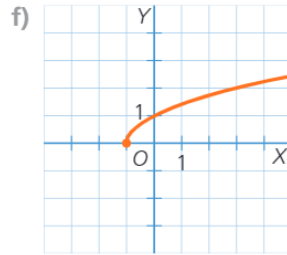
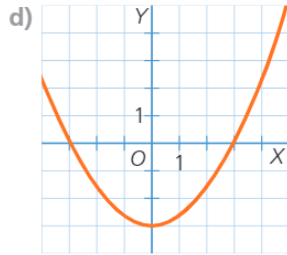
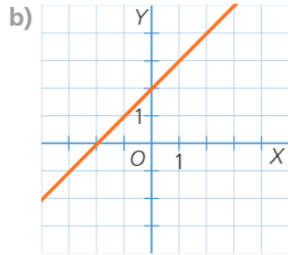
b) Dom $f = \mathbb{R}$ Recorrido $= \mathbb{R}$
Corte: (-2, 0) y (0, 2)

c) Dom $f = \mathbb{R}$
Recorrido $= (-\infty, 2]$
Corte: (0, 0) y (4, 0)

d) Dom $f = \mathbb{R}$
Recorrido $= [-3, +\infty)$
Corte: (-3, 0), (3, 0) y (0, -3)

e) Dom $f = \mathbb{R}$ Recorrido $= \mathbb{R}$
Corte: (-1, 0), (2, 0), (3, 0) y (0, 3)

f) Dom $f = [-1, +\infty)$
Recorrido $= [0, +\infty)$
Corte: (0, 0) y (0, 1)

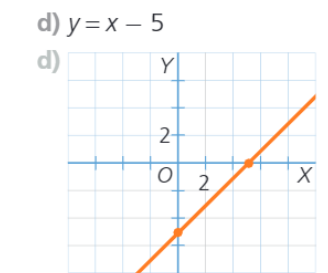
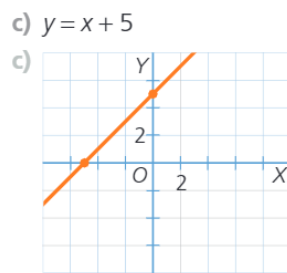
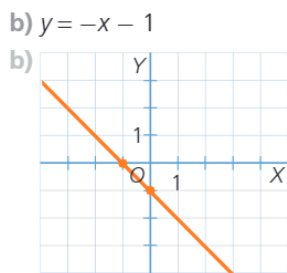
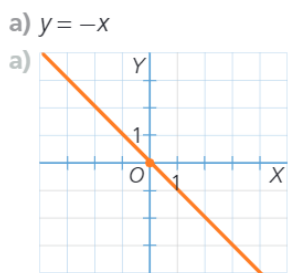


12 Halla algebraicamente el dominio de:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ c) $f(x) = x^2 + x$ d) $f(x) = \sqrt{x}$ e) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ f) $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ b) Dom $f = \mathbb{R}$ c) Dom $f = \mathbb{R}$ d) Dom $f = [0, +\infty)$ e) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$ f) Dom $f = \mathbb{R} - \{5\}$

14 Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones y utilízalos para dibujarlas.



15 Calcula los puntos de corte con los ejes de estas funciones.

a) $y = 2x^2 - 2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = -x^2 + 3x$ d) $y = \sqrt{x}$

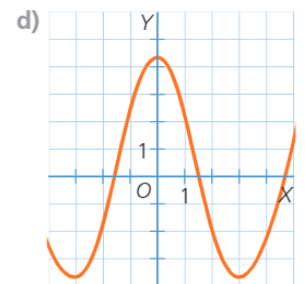
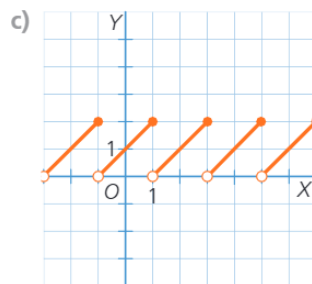
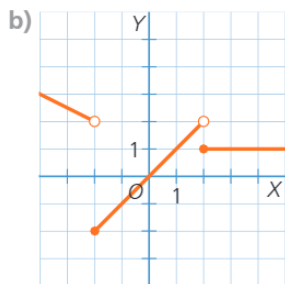
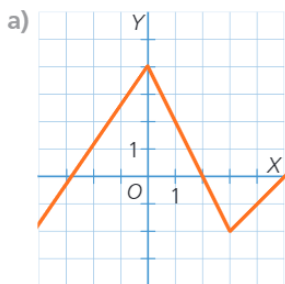
a) Cortes con eje X: $2x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = -1 \rightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$. Corte con eje Y: Si $x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (0, -2)$

b) Con eje X: $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = -1 \rightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$. Con eje Y: Si $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

c) Con eje X: $-x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(-x + 3) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 3 \rightarrow (0, 0)$ y $(3, 0)$. Con eje Y: Si $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

d) Con eje X: $\sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$. Con eje Y: Si $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

18 Indica si las funciones representadas son continuas; en caso de que alguna no lo sea, escribe los puntos de discontinuidad.



a) Es una función continua.

b) No es una función continua. Presenta puntos de discontinuidad en $x = 2$ y $x = -2$.

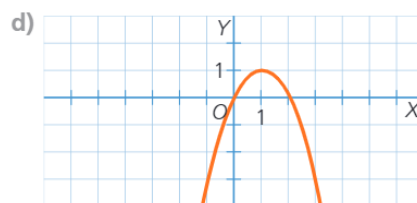
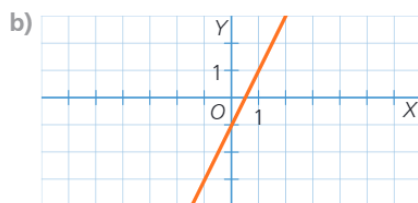
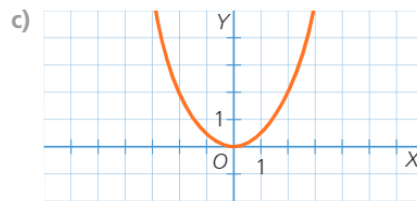
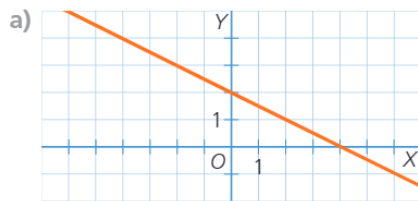
c) No es una función continua.

Presenta puntos de discontinuidad en $x = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$

d) Es una función continua.

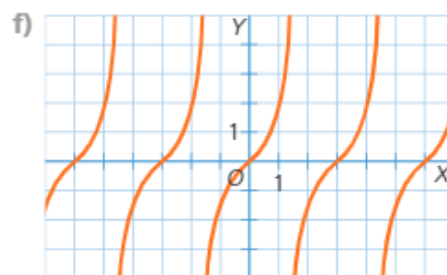
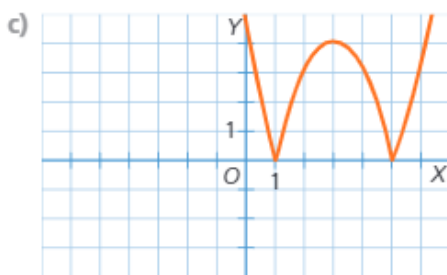
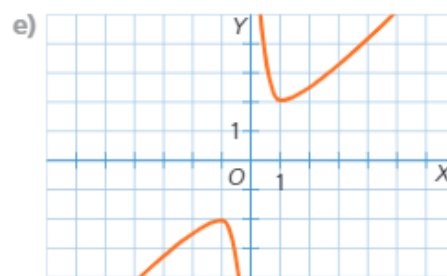
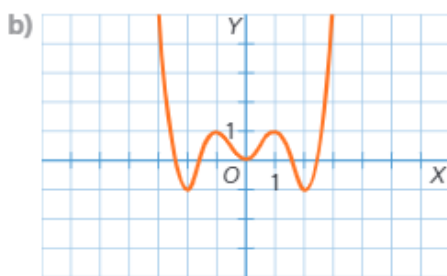
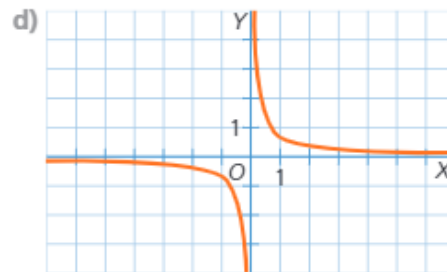
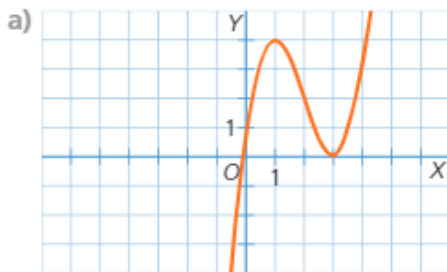
Soluciones de ejercicios de este pdf:

22) Estudia la monotonía de siguientes funciones.



- a) Es una función decreciente en todo su dominio.
- b) Es una función creciente en todo su dominio.
- c) Es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$. Tiene un punto mínimo en $(0, 0)$.
- d) Es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$, es decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un punto máximo en $(1, 1)$.

23) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones, así como sus máximos y mínimos.



- a) Es creciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(1, 3)$. El punto máximo es $(1, 4)$ y el punto mínimo, $(3, 0)$.
- b) Es creciente en $(-2, -1)$, $(0, 1)$ y $(2, +\infty)$, es decreciente en $(-\infty, -2)$, $(-1, 0)$ y $(1, 2)$. Los puntos máximos son $(-1, 1)$ y $(1, 1)$, los puntos mínimos, $(-2, -1)$, $(0, 0)$ y $(2, -1)$.
- c) Es creciente en $(1, 3)$ y $(5, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, 5)$. El punto máximo es $(3, 4)$ y los puntos mínimos, $(1, 0)$ y $(5, 0)$.
- d) Es decreciente en todo su dominio. No tiene puntos máximos ni mínimos.
- e) Es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, es decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. El máximo es $(-1, -2)$, y el punto mínimo, $(1, 2)$.
- f) Es creciente en todo su dominio. No tiene puntos máximos ni mínimos.

24 Razona si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Hay funciones que no tienen máximos ni mínimos.

b) Entre dos puntos mínimos necesariamente hay dos puntos máximos.

a) Verdadera, por ejemplo $y = x$ es creciente en todo su dominio.

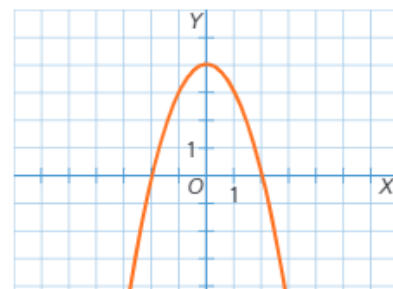
b) Falsa, entre dos puntos mínimos, en una función continua, hay solo un punto máximo.

41 Estudia la continuidad y la monotonía de la función representada en esta gráfica.
¿Cuáles son los máximos y los mínimos de esta función?

Es una función continua.

Es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

Tiene un punto máximo, el $(0, 4)$ y no tiene puntos mínimos.



43 Analiza y razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Todas las funciones tienen máximos y mínimos.

b) En una función continua que tiene dos puntos mínimos necesariamente hay un punto máximo.

c) Una función constante no tiene puntos máximos ni puntos mínimos.

d) Existen funciones que son decrecientes en todo su dominio.

a) Falsa, por ejemplo $f(x) = x$.

c) Verdadera.

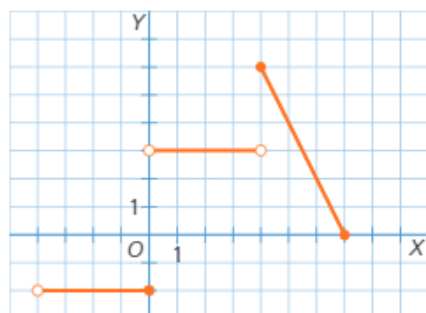
b) Verdadera.

d) Verdadera, por ejemplo $f(x) = -x^3$.

44 ¿En qué valor de la variable x alcanzará una función su punto máximo y su punto mínimo si sabemos que es creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$, decreciente en $(-2, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$?

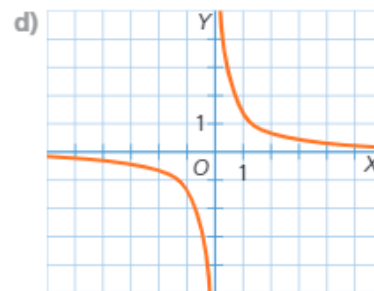
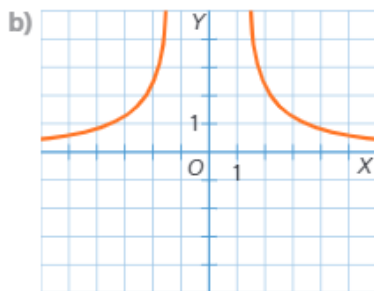
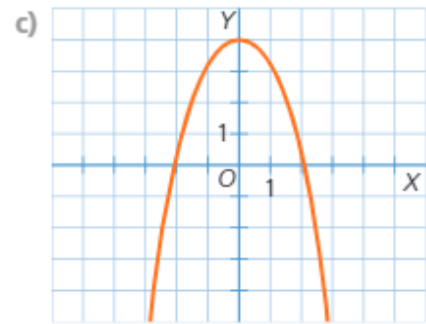
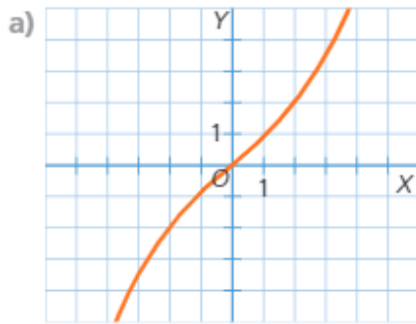
La función alcanzará su punto máximo en $x = -2$ y su punto mínimo en $x = 1$.

45 Observa esta función y estudia su continuidad y su monotonía.



La función no es continua, presenta puntos de discontinuidad en $x = 0$ y $x = 4$.
Es constante en $(-4, 0)$ y $(0, 4)$, y es decreciente en el intervalo $(4, 7)$.

26 A la vista de estas gráficas decide qué tipo de simetría tiene cada una.



a) Tiene simetría impar.

b) Tiene simetría par.

c) Tiene simetría par.

d) Tiene simetría impar.

28 Dadas las funciones, señala si son pares, impares o no presentan simetría.

a) $f(x) = -x$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = x^5 - x$

d) $f(x) = x^3 - x^2$

a) $f(-x) = -(-x) = x$

$-f(x) = -(-x) = x$

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Es función impar.

c) $f(-x) = (-x)^5 - (-x) = -x^5 + x$

$-f(x) = -(x^5 - x) = -x^5 + x$

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Es función impar.

b) $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$

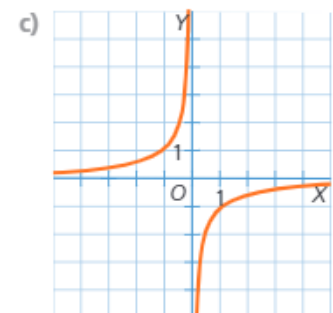
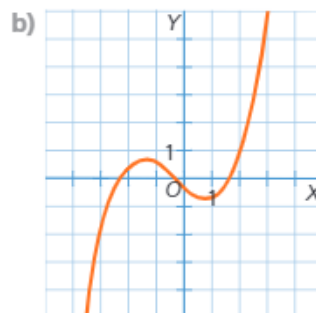
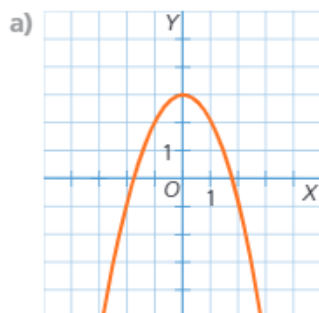
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Es función par.

d) $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2$

$-f(x) = -(x^3 - x^2) = -x^3 + x^2$

No tiene simetría par ni tampoco simetría impar.

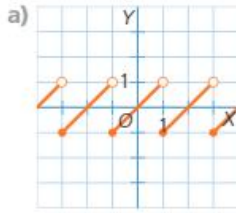
48 Estudia las simetrías de las funciones.



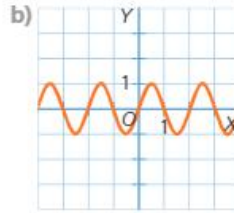
a) Es simétrica respecto del eje de ordenadas.

b) y c) Es simétrica respecto del origen de coordenadas, es una función impar.

29 Estas funciones son periódicas. ¿Cuál es el valor del período?

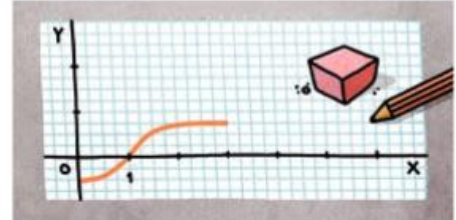
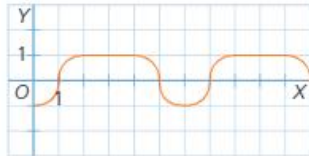


a) $T = 2$ unidades



b) $T = 2$ unidades

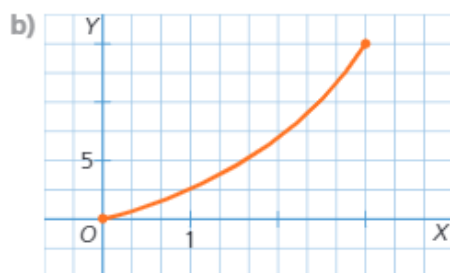
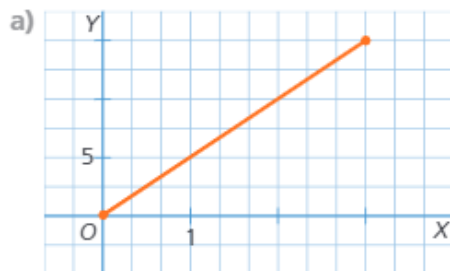
30 Ana ha borrado la gráfica desde el punto $x = 3$; dibújala en tu cuaderno sabiendo que corresponde a una función periódica de período $T = 5$.



32 Cada una de las siguientes gráficas representan cómo se desarrolló la carrera en la que participaron Miguel, Carlos, Ana y Julia.

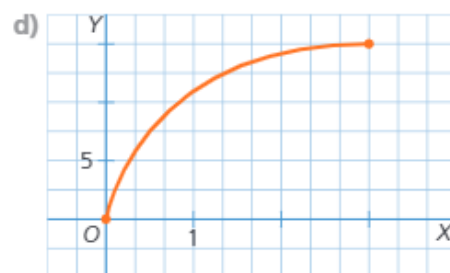
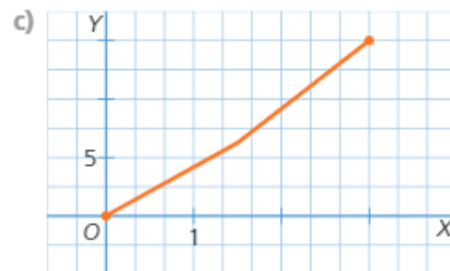
Decide qué gráfica le corresponde a cada uno sabiendo que:

- Ⓘ Miguel comenzó despacio y fue aumentando progresivamente su velocidad.
- Ⓚ Carlos empezó muy rápido y fue reduciendo su velocidad de forma gradual.
- Ⓜ Ana hizo despacio la primera mitad del recorrido y más rápido la otra mitad.
- Ⓝ Julia mantuvo un ritmo constante durante todo el recorrido.



a) Julia

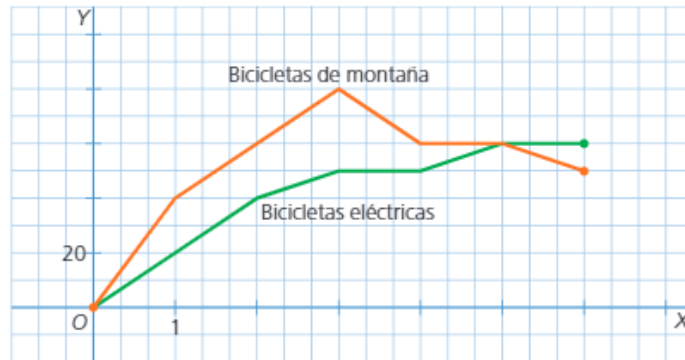
b) Miguel



c) Ana

d) Carlos

33 La gráfica representa las ventas de bicicletas eléctricas y de montaña en una tienda de deportes en los últimos 6 años.

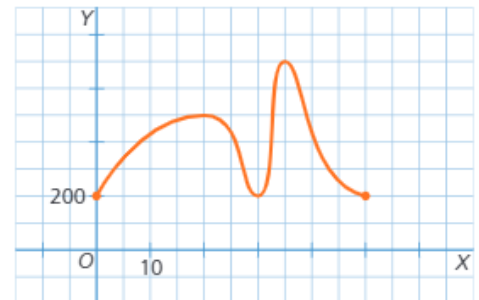


- ¿Cuántas bicicletas de cada tipo se vendieron el primer año?
 - ¿En qué año fue mayor la diferencia entre las ventas de bicicletas eléctricas y de montaña?
 - ¿Coincidieron las ventas en algún momento?
- En el primer año se vendieron 40 bicicletas de montaña y 20 bicicletas eléctricas.
 - En el tercer año hubo una diferencia mayor entre las ventas de los dos tipos.
 - Sí, coincidieron las ventas en el quinto año.

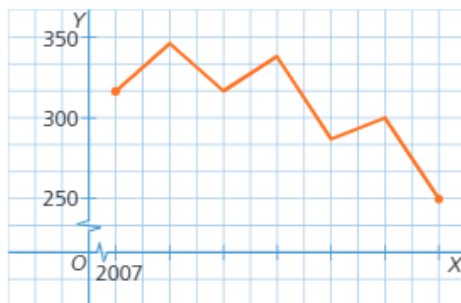
53 En la gráfica podemos ver el perfil de la altitud de una carrera de motos a lo largo de 50 km. Describe la gráfica teniendo en cuenta que la altitud se ha medido en metros.

La carrera parte de una altitud sobre el nivel del mar de 200 m, durante 20 km ascienden hasta los 500 m. Durante 10 km realizan una bajada y alcanzan la misma altitud de partida.

Los 5 km siguientes suben hasta los 700 m y a partir del km 35 y durante 15 km realizan una bajada para volver a la altitud inicial.



54 La gráfica nos muestra la variación en el número de accidentes de coche en una comunidad autónoma entre los años 2007 y 2013. Realiza el estudio completo de la función expresada por esta gráfica.



La variable independiente son *los años* y la variable dependiente, *el número de accidentes*.

Dominio: [2007, 2013] Recorrido: [250, 340]

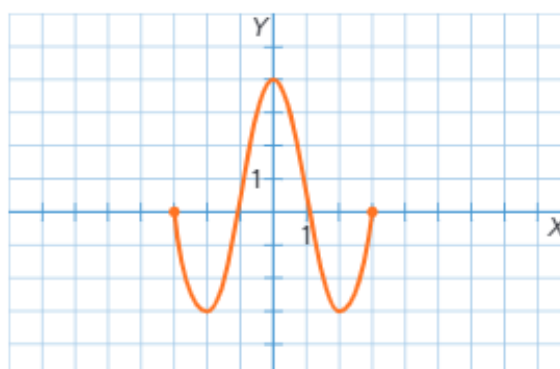
No tiene puntos de corte con los ejes. Es una función continua.

Es creciente en (2007, 2008), (2009, 2010) y (2011, 2012) y decreciente en (2008, 2009), (2010, 2011) y (2012, 2013).

Presenta puntos máximos en los puntos (2008, 340), (2010, 330) y (2012, 300) y puntos mínimos en (2009, 317) y (2011, 280).

No es simétrica ni periódica.

56 Fíjate en la gráfica de esta función.



- a) Halla el dominio y el recorrido.
- b) ¿Es simétrica? ¿Y periódica?
- c) Analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) ¿Tiene máximos o mínimos? ¿Cuáles son?

a) Dominio: $[-3, 3]$

Recorrido: $[-3, 4]$

b) Sí, es simétrica, es una función par.

No es periódica.

c) La función es creciente en $(-2, 0)$ y $(2, 3)$ y decreciente en $(-3, -2)$ y $(0, 2)$.

d) Tiene un punto máximo en $(0, 4)$ y dos puntos mínimos, $(-2, -3)$ y $(2, -3)$.

58 Esta gráfica refleja el precio, en euros, del kilo de merluza, en un año de enero a diciembre.

- a) ¿En qué mes se produjo la mayor subida del precio?
- b) ¿Durante cuánto tiempo se mantuvo el precio sin subidas?
- c) ¿En qué mes alcanzó su valor máximo?
- d) ¿Durante cuánto tiempo experimentó el precio un alza ininterrumpida?

a) En abril.

b) Desde enero hasta fin de marzo.

c) En diciembre.

d) Desde junio hasta octubre, cuatro meses.

